۹۸/۱۰/۱۴ **نکات مربوط به اسلاید ها (سری ۲)**

میثم حسینی حلوائی

★ محورهای مختصات مقصود عمود بر هم می باشد. جهت چرخش مثبت به صورت ساعتگرد می باشد.

ماتریس انتقال ← دارای سه روش
- کسینوس هادی
- زوایای اویلر
- کواترنیون

★ نکته ی مهم در انتقال دستگاه ها اینکه نسبت به دستگاه اصلی (اینرسی) انجام می شود

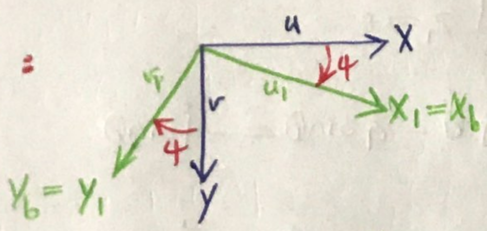
۱- **کسینوس هادی:** ماتریس ۳×۳ است که ستونهای آن بیانگر بردار واحد تصویر شده در محور مختصات بدنه روی محور مختصات ثانویه (زمین، ناوبری، ...) است.

$$C_b^n = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

المان در سطر i ام و ستون j ام بیانگر کسینوس زاویه بین محور i ام مرجع و j ام مختصات بدنه می باشد

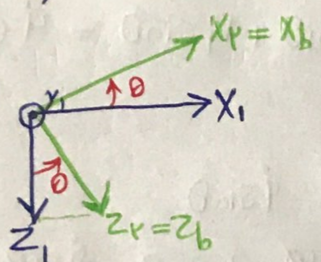
۲- **زوایای اویلر:** ترتیب چرخش بسیار مهم است و به ترتیب ψ و θ و ϕ است.

الف) چرخش ψ حول محور Z:



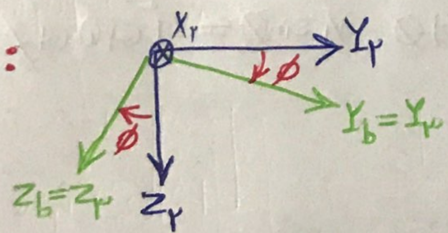
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

ب) چرخش θ حول محور y:



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

ج) چرخش حول محور x، ϕ:



$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow C_b^n = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

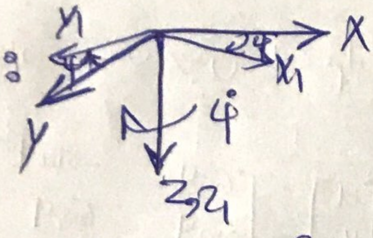
★ ترتیب ضرب: دومی در سومی سپس اولی در حاصلضرب دومی و سومی

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

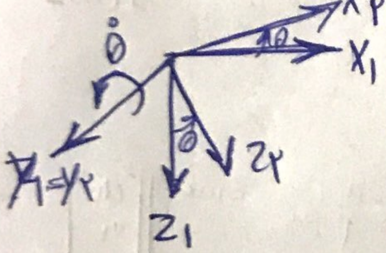
در زوایای کم $\Rightarrow$ $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = \theta$ $\Rightarrow$ $C_b^n = \begin{bmatrix} 1 & -\psi + \theta\phi & \phi\psi + \theta \\ \psi & 1 + \phi\theta\psi & -\phi + \theta\psi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\text{را صفر می‌کنیم}]{\text{حاصلضرب زوایای کوچک}}$ $C_b^n = \begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix}$

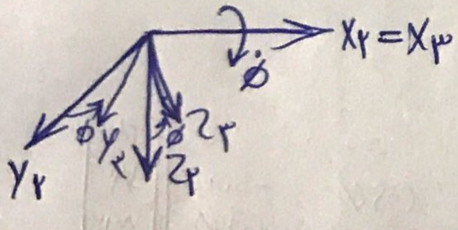
★ ارتباط بین : سرعت‌های زاویه‌ای
و مشتق تغییرات
زوایای اویلر



$$p \begin{cases} X_1 = \dot\psi \\ Y_1 = 0 \\ Z_1 = 0 \end{cases}$$



$$q \begin{cases} X_2 = \cancel{X_1\cos\theta} - Z_1\sin\theta = -\dot\psi\sin\theta \\ Y_2 = \dot\theta \\ Z_2 = Z_1\cos\theta + \cancel{X_1\sin\theta} = \dot\psi\cos\theta \end{cases}$$



$$r \begin{cases} X_3 = \dot\phi - \dot\psi\sin\theta \\ Y_3 = Y_2\cos\phi + Z_2\sin\phi = \dot\theta\cos\phi + \dot\psi\cos\theta\sin\phi \\ Z_3 = Z_2\cos\phi - Y_2\sin\phi = \dot\psi\cos\theta\cos\phi - \dot\theta\sin\phi \end{cases}$$

ادامه‌ی نکات سری ۲ :

$$\begin{cases} p = \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta & (1) \\ q = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi & (2) \\ r = -\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi & (3) \end{cases}$$

$$(2):\quad \dot{\psi} = \frac{q - \dot{\theta}\cos\phi}{\cos\theta\sin\phi}$$

$$(3)\quad r = -\dot{\theta}\sin\theta + \frac{q - \dot{\theta}\cos\phi}{\cancel{\cos\theta}\sin\phi}\cancel{\cos\theta}\cos\phi = -\dot{\theta}\sin\theta + \frac{q\cos\phi}{\sin\phi} - \frac{\dot{\theta}\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$r = \frac{-\dot{\theta} + q\cos\phi}{\sin\phi}$$

$$\Rightarrow \quad -\dot{\theta} + q\cos\phi = r\sin\phi \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = -r\sin\phi + q\cos\phi}$$

$$\dot{\psi} = \frac{q - (-r\sin\phi + q\cos\phi)\cos\phi}{\cos\theta\sin\phi} = \frac{q}{\cos\theta\sin\phi} + \frac{r\cancel{\sin\phi}\cos\phi}{\cos\theta\cancel{\sin\phi}} - \frac{q\cos^2\phi}{\cos\theta\sin\phi}$$

$$\boxed{\dot{\psi} = \frac{q\sin\phi}{\cos\theta} + r\frac{\cos\phi}{\cos\theta}}$$

$$\dot{\psi} = q\sin\phi\sec\theta + r\cos\phi\sec\theta$$

$$P = \dot{\phi} - \frac{q\sin\phi}{\cos\theta}\sin\theta - r\frac{\cos\phi}{\cos\theta}\sin\theta$$

$$P = \dot{\phi} - q\tan\theta\sin\theta - r\tan\theta\cos\phi \Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = p + q\tan\theta\sin\theta + r\tan\theta\cos\phi}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 1 & \tan\theta\sin\theta & \tan\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

در زوایای ۹۰± دچار تکینگی می‌شویم ← راه حل:

① استفاده از پرواز در زوایای کمتر

② θ را معادل ۸۹± یا ۹۰± نگیریم

③ کواترنیون

کواترنیون علاوه بر اینکه مشکل تکینگی را برطرف می‌کند انتقال زوایا را بدون هیچ محدودیتی انجام می‌دهد:

$$q=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\frac{\mu}{2}) \\ (\frac{\mu_x}{\mu})\sin(\frac{\mu}{2}) \\ (\frac{\mu_y}{\mu})\sin(\frac{\mu}{2}) \\ (\frac{\mu_z}{\mu})\sin(\frac{\mu}{2}) \end{bmatrix}$$

μ مقدار بردار زاویه چرخشی کواترنیون است

$$q=a+\hat{i}b+\hat{j}c+\hat{k}d$$
$$p=e+\hat{i}f+\hat{j}g+\hat{k}h$$
$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$$
$$ij=k \quad j\cdot k=i \quad k\cdot i=j$$

بغیر از این موارد همه منفی هستند.

$$q\cdot p=(a+\hat{i}b+\hat{j}c+\hat{k}d)(e+\hat{i}f+\hat{j}g+\hat{k}h)=$$
$$=ae+af\hat{i}+\hat{j}ag+\hat{k}ah+eb\hat{i}+\underbrace{fb\,\hat{i}^2}_{-fb}+\underbrace{bg\,\hat{i}\hat{j}}_{bg\hat{k}}+\underbrace{bh\,\hat{i}\hat{k}}_{-bh\hat{j}}+$$
$$+ec\hat{j}+\underbrace{fc\,\hat{j}\hat{i}}_{-fc\hat{k}}+\underbrace{cg\,\hat{j}^2}_{-cg}+\underbrace{hc\,\hat{j}\hat{k}}_{hc\hat{i}}+de\hat{k}+\underbrace{df\,\hat{k}\hat{i}}_{df\hat{j}}+\underbrace{dg\,\hat{k}\hat{j}}_{-dg\hat{i}}+hd\hat{k}$$
$$=(ae-bf-cg-dh)+(af+eb+ch-dg)i$$
$$+(ag-bh+df+ec)\hat{j}+(-fc+ah+de+bg)\hat{k}$$

$$q\cdot p=\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

$$R^b=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$
$$R^{b'}=0+x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$q=a+\hat{i}b+\hat{j}c+\hat{k}d$$
$$q^*=a-\hat{i}b-\hat{j}c-\hat{k}d$$

$$R_n'=qR^{b'}q^*=(a+\hat{i}b+\hat{j}c+\hat{k}d)(0+x\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}z)(a-\hat{i}b-\hat{j}c-\hat{k}d)$$

بعد از انجام محاسبات این حاصلضرب:

$$C=\begin{bmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(bd+ac) \\ 2(bc+ad) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(cd+ab) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

این همونیه که در روش انتقال ماتریس بدست آوردیم